

## Предмет СТ5

### Математичні основи страхування життя

#### Мета

Мета курсу полягає в ознайомленні з основами математичних методів, які можуть використовуватися, щоб моделювати й оцінювати потоки платежів пов'язаних зі смертю, виживанням або іншими невизначеними ризиками.

#### Зв'язок з іншими курсами

У курсах СТ1 - Фінансова Математика, СТ3 - Імовірність і Математична Статистика та СТ4 - Моделі введено методи, які будуть використатися при викладанні даного курсу.

Курс СТ2 – Спеціальні Методи Страхування Життя використовує принципи та методи з даного курсу для розв'язання задач із страхування життя.

#### Програма

Курс знайомить слухачів із такими темами:

- (i) Визначення простих типів страхування та ануїтетів, одержання формул для середніх і дисперсій поточної вартості платежів згідно з цими контрактами за умов постійної детермінованої відсоткової ставки.
  1. Визначення таких понять: довічне страхування життя, тимчасове страхування, чисте дожиття, дожиття, страхування від хвороб, довічний ануїтет, тимчасовий ануїтет, премія, виплати за угодою. Угоди страхування та ануїтети з відкладеними виплатами.
  2. Визначення ймовірностей  ${}_{n|m}q_x$ ,  ${}_nq_x$  та їхніх селективних аналогів  ${}_{n|m}q_{[x]+r}$ ,  ${}_nq_{[x]+r}$ .
  3. Отримання виразів для середніх і дисперсій поточної вартості виплат за угодою у вигляді сум, для кожної угоди із згаданих вище, у термінах випадкового усіченого часу майбутнього життя, припускаючи, що майбутні виплати сплачують наприкінці року смерті й що виплати ануїтету здійснюють щорічно авансом або відкладені на деякий термін. Спрощення отриманих виразів до форми придатної для обчислень за довідковими таблицями або іншими джерелами.
  4. Отримання виразів для середніх і дисперсій поточної вартості виплат за угодою у вигляді інтегралів, для кожної угоди із згаданих вище, у термінах випадкового часу майбутнього життя, припускаючи, що майбутні виплати сплачують в момент смерті й що виплату за ануїтетами здійснюють неперервно. Спрощення отриманих виразів до форми придатної для обчислень за довідковими таблицями або іншими джерелами.
  5. Поширення методів попередніх пунктів 3 і 4, на випадок угод, премій яких сплачують частіше ніж щорічно, а виплати здійснюють щорічно або частіше ніж щорічно.

6. Визначення символів  $A_x, A_{x:\overline{n}}, A_{x:\overline{n}}^1, A_{x:\overline{n}}^{\overline{1}}, a_x, a_{x:\overline{n}}, {}_m|a_{x:\overline{n}}, \ddot{a}_x, \ddot{a}_{x:\overline{n}}, {}_m|\ddot{a}_{x:\overline{n}}$  та їхніх селективних і неперервних аналогів. Поширення факторів ануїтетів, щоб урахувати можливість виплат частіших ніж щорічні, але менш частіших ніж неперервні.
7. Отримання зв'язку ануїтетів виплачуваних заздалегідь і у борг, тимчасових, відкладених та довічних.
8. Отримання формул  $A_x = 1 - d\ddot{a}_x, A_{x:\overline{n}} = 1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}}$ , та їхній селективних та неперервних аналогів.
9. Визначення очікуваного накопичення виплат в 1., і отримання виразів для них, які відповідають очікуваній поточній вартості в 3., 4., та 5.

(ii) Опис практичних методів оцінки середніх і дисперсій простих угод, наведених у пункті (i).

1. Опис функцій з таблиць смертності  $l_x$  і  $d_x$  та їхніх селективних аналогів  $l_{[x]+r}$  й  $d_{[x]+r}$ .
2. Зображення наступних ймовірностей з таблиць смертності в термінах функцій в 1.:  ${}_n P_x, {}_n Q_x, {}_{n|m} Q_x$  та їхніх селективних еквівалентів  ${}_n P_{[x]+r}, {}_n Q_{[x]+r}, {}_{n|m} Q_{[x]+r}$ .
3. Зображення середніх і дисперсій з пункту (i) 3. у термінах функцій в 1. і 2.
4. Визначення середнього і дисперсії з пункту (i) 3 за довідковими таблицями, використовуючи, де потрібно, співвідношення з пунктів (i) 7 та 8.
5. Отримання наближених формул та обчислення середніх і дисперсій в пункті (i) 4. у термінах з пункту (i) 3.
6. Оцінка очікуваних накопичень в пункті (i) 9.
7. Опис практичних альтернатив таблицям смертності, які можуть бути використані для обчислень у пунктах 4., 5. і 6.

(iii) Опис і обчислення, використовуючи остаточну або селективну смертність, нетто-премій та резервів нетто-премій для простих страхових угод.

1. Визначення випадкових майбутніх нетто-втрат при страхуванні та встановлення принципу еквівалентності.
2. Визначення і обчислення нетто-премій для страхових угод з пункту (i) 1. Премії і ануїтети можуть виплачуватись щорічно, частіше ніж щорічно та неперервно. Страхові виплати можуть здійснюватися наприкінці року смерті, зразу після смерті, щорічно, частіше ніж щорічно, або неперервно.
3. Встановлення, чому страхова компанія створює резерви.
4. Опис перспективних й ретроспективних резервів.
5. Визначення і встановлення перспективних і ретроспективних резервів нетто-премій щодо угод з пункту (i) 1. із преміями з (iii) 2.
6. Встановлення рівності перспективних і ретроспективних резервів, які розраховані за однакових умов.
7. Отримання рекурсивних співвідношень між резервами нетто-премій у щорічних проміжках, для угод з виплатами у випадку смерті наприкінці року смерті і щорічними преміями.
8. Одержання диференціального рівняння Тіле для резервів нетто-премій угод з виплатами у момент смерті і преміями, які сплачують неперервно.

9. Визначення і обчислення для окремого поліса або портфеля полісів: напруги смертності на ризик, очікуваної напруги смертності, фактичної напруги смертності.

(iv) Обчислення нетто-премій і резервів нетто-премій, використовуючи остаточну або селективну смертність, для зростаючих та спадних страхових виплат і анuitетів.

1. Розширення методів (ii) для обчислення очікуваної поточної вартості анuitетів, премії чи виплат у випадку смерті, які зростають або спадають з постійною швидкістю. Обчислення нетто-премій і резервів нетто-премій для угод із преміями і виплатами, які змінюються як описано.
2. Визначення символів  $(IA)_x$ ,  $(I\ddot{a})_x$ , і  $(Ia)_x$  та їхніх селективних еквівалентів.
3. Обчислення очікуваної поточної вартості анuitетів, премій та виплат у випадку смерті, що збільшуються або зменшуються на постійну грошову суму. Обчислення нетто-премій і резервів нетто-премій для угод із преміями і виплатами, які змінюються як описано.
4. Визначення прибуткових угод.
5. Перелік типів бонусів, які можуть бути видані в прибуткових угодах.
6. Обчислення нетто-премій і резервів нетто-премій для прибуткових угод.

(v) Обчислення бруто-премій і резервів анuitетів та угод страхування.

1. Перелік типів витрат, які закладають у страхову угоду.
2. Опис впливу інфляції на витрати, внесені у список в 1.
3. Визначення випадкової величини майбутніх бруто-втратах для анuitетів та угод страхування, внесених у список в (i) 1. і (iv).
4. Обчислення бруто-премій, використовуючи випадкову величину майбутніх бруто-втратах та принцип еквівалентності. Премії і анuitети можуть сплачуватися щорічно, частіше ніж щорічно, або неперервно. Виплати можуть здійснюватися наприкінці року смерті, негайно після смерті, щорічно, частіше ніж щорічно, або неперервно.
5. Обчислення бруто-премій, з використанням простих критеріїв інших ніж принцип еквівалентності.
6. Обчислення перспективних резервів бруто-премій, з використанням випадкової величини майбутніх втратах.
7. Визначення і обчислення ретроспективних резервів бруто-премій.
8. Встановлення умов, за яких перспективний резерв дорівнює ретроспективному за наявності навантажень витрат.
9. Встановлення рівності за відповідних умов перспективного та ретроспективного резервів, за наявності або відсутності навантажень витрат, для всіх стандартних угод з постійними, зростаючими або спадними виплатами.
10. Отримання рекурсивних співвідношень між послідовними щорічними резервами для угод з фіксованими щорічними преміями з навантаженнями витрат.

(vi) Визначення і використання функцій аналогічних до попередніх для двох осіб.

1. Розширення методів пунктів (i) - (v), щоб мати змогу працювати з потоками коштів, які залежать від смерті або виживання однієї або обох осіб.
2. Розширення методів 1. щоб мати змогу працювати з функціями, які залежать як від фіксованого терміну так і від віку.

(vii) Опис методів, які можуть бути використані для моделювання потоків коштів залежних від конкуруючих ризиків.

1. Пояснення, як величина потоку коштів, що залежить більше ніж від одного ризику, може бути оцінена за допомогою багатостанової марковської моделі.
2. Отримання відповідних ймовірностей за даними інтенсивностями переходу, використовуючи рівняння Колмогорова введені у пункті (vii) курсу СТ4 - Моделі.
3. Отримання інтенсивностей переходу за даними відповідними ймовірностями.

(viii) Опис методу дисконтованих вартостей для використання в оцінюванні, резервуванні та визначенні прибутковості.

1. Визначення угод з прив'язкою до паїв.
2. Визначення очікуваного потоку коштів для довічного, тимчасового страхувань, доживань, анuitетів та угод з прив'язкою до паїв.
3. Тест прибутковості простих угод з щорічними преміями зі списку в 2. і визначення вектора прибутку, сигнатури прибутку, поточної нетто-вартості і розміру прибутку.
4. Демонстрація використання тесту прибутковості для встановлення ціни.
5. Демонстрація використання тесту прибутковості для встановлення резервів.
6. Опис побудови й використання таблиць множинних декрементів, включаючи співвідношення з пов'язаними таблицями з одним декрементом.
7. Використання таблиць множинних декрементів для визначення очікуваних потоків коштів, які залежать більш ніж від одного декременту: пенсійні виплати, інші виплати пов'язані з зарплатами, страхуванням здоров'я і доглядом.
8. Опис практичних альтернатив до таблиць множинних декрементів, які можна використати для отримання оцінок у 7.
9. Розширення методів 3., 6., і 7. для визначення очікуваних потоків коштів залежних від інших ризиків, які не пов'язані з життям людини.

(ix) Опис основних форм неоднорідності в межах популяції та видів відбору.

1. Встановлення основних факторів, які здійснюють внесок у змінюваність смертності й захворюваності за регіонами і відповідно до соціально-економічного середовища: заняття, їжа, проживання, клімат/географія, освіта, генетика.
2. Встановлення і приклади головних форм відбору: тимчасовий початковий відбір, класовий відбір, часовий відбір, фіктивний відбір, несприятливий відбір.
3. Пояснення який відбір може очікуватися серед індивідів, що укладають різні основні типи угод страхування життя, або серед учасників великих пенсійних програм.
4. Пояснення чому необхідно мати різні таблиці смертності для різних класів індивідів.
5. Пояснення як декременти можуть спричиняти ефект селекції.
6. Пояснення теоретичних підстав використання класифікації ризиків у страхуванні життя.
7. Пояснення впливу наявності генетичної інформації на класифікацію ризиків у страхуванні життя.

8. Пояснення концепції єдиного індексу та його переваг і недоліків для підсумовування і порівняння фактичного досвіду.
9. Визначення наближеної, безпосередньо та опосередковано стандартизованих сил смертності, стандартизованого відношення смертності, та демонстрація їх застосування.