

СТ4: Моделі

Мета.

Метою курсу «Моделі» є надання слухачам систематизованих знань з теорії випадкових процесів, моделей виживання та їх застосування.

На основі курсу слухачі повинні вміти:

- (i) Описати основні принципи актуарного моделювання.
 1. Описати як і чому використовуються моделі.
 2. Пояснити переваги і недоліки моделювання.
 3. Пояснити різницю між стохастичними і детермінованими моделями та визначити переваги і недоліки цих моделей.
 4. Описати, як визначити чи буде модель придатною для конкретного застосування.
 5. Пояснити різницю між короткостроковими і довгостроковими властивостями моделі та як це можна використати при визначенні придатності моделі для конкретного застосування.
 6. Описати, як аналізуються можливі результати моделі і пояснити яким чином це можна використати при виборі моделі.
 7. Описати процес перевірки чутливості моделі до припущень і пояснити чому цей процес є важливою складовою моделювання.
 8. Пояснити які фактори повинні братися до уваги при оприлюдненні результатів застосування моделі.
- (ii) Дати основні означення випадкових процесів та їх класифікацію.
 1. Дати означення випадкового процесу і, зокрема, лічильного процесу.
 2. Провести класифікацію процесу враховуючи:
 - у неперервному чи дискретному часі розглядається процес;
 - неперервний чи дискретний вибірковий простір процесу;
 - чи є процес змішаного типу.Навести приклади процесів кожного типу.
 3. Описати можливі застосування процесів змішаного типу.
 4. Пояснити, що означає марківська властивість для випадкового процесу, а також у термінах фільтрації.
- (iii) Визначити ланцюг Маркова та вміти його застосовувати.
 1. Визначити основні характеристики моделі на основі ланцюга Маркова.
 2. Сформулювати рекурентні співвідношення, які представляють ланцюг Маркова.
 3. Обчислити стаціонарний розподіл ланцюга Маркова у найпростіших випадках.
 4. Описати систему страхових внесків, що базується на частоті позовів, в термінах ланцюга Маркова. Описати інші прості застосування.
 5. Описати моделі, основані на неоднорідних ланцюгах Маркова, та їх застосування.
 6. Показати як ланцюги Маркова можна застосовувати при моделювання та як їх можна моделювати.
- (iv) Визначити і застосовувати процеси Маркова.
 1. Описати основні характеристики марківської моделі.
 2. Визначити процес Пуассона, вивести розподіл числа подій на даному часовому інтервалі, вивести розподіл часу між появою подій і вміти застосовувати ці результати.
 3. Вивести рівняння Колмогорова для процесу Маркова з незалежною від часу, а також із залежною від часу/віку інтенсивністю переходу.
 4. Розв'язати рівняння Колмогорова у найпростіших випадках.

5. Описати прості моделі виживання, моделі хвороби і моделі подружнього стану у термінах процесів Маркова і описати їх прості застосування.
 6. Записати рівняння Колмогорова для моделі з інтенсивністю переходу залежною не лише від віку/часу, але й від тривалості перебування в одному або в декількох станах.
 7. Описати моделі хвороби і моделі подружнього стану у термінах залежних від тривалості перебування процесів Маркова та описати інші прості застосування.
 8. Показати як стрибкоподібні процеси Маркова можуть бути використані при моделюванні і як їх моделювати.
- (v) Пояснити поняття моделей виживання.
1. Описати модель тривалості життя для віку x як випадкової величини.
 2. Сформулювати умови узгодженості для випадкових величин, які представляють тривалість життя для різного віку.
 3. Визначити функцію розподілу і щільність розподілу випадкової майбутньої тривалості життя, функції виживання, сили смертності або інтенсивності відмов, і вивести співвідношення між ними.
 4. Визначити актуарні символи ${}_t p_x$ і ${}_t q_x$ і вивести інтегральні формули для них.
 5. Сформулювати закони смертності Гомпертца і Макехама.
 6. Визначити скорочену майбутню тривалість життя з віку x і вивести його розподіл.
 7. Визначити математичне сподівання і дисперсію повної і скороченої майбутньої тривалості життя і одержати аналітичні вирази для них. Визначити символи e_x і e_x° та вивести наближенні співвідношення між ними.
 8. Описати модель з двома станами і порівняти припущення при її побудові з припущеннями при побудові моделі випадкової тривалості життя.
- (vi) Описати процедури оцінювання розподілів тривалості життя.
1. Описати різні способи якими можна цензурувати дані про тривалість життя.
 2. Описати оцінювання емпіричної функції виживання за відсутності цензурування, і які проблеми виникають при цензуруванні.
 3. Описати оцінку Каплана-Мейера для функції виживання за наявності цензурування. Пояснити як вона виникає як оцінка максимальної правдоподібності, обчислити її для типових даних і оцінити її дисперсію.
 4. Описати оцінку Нельсона-Аалена кумулятивної інтенсивності відмов за наявності цензурування. Пояснити як вона виникає, як оцінка максимальної правдоподібності, обчислити її для типових даних і оцінити її дисперсію.
 5. Описати модель Кокса для пропорційних відмов, вивести оцінку максимальної часткової правдоподібності за відсутності залежностей, і визначити її асимптотичний розподіл.
- (vii) Описати статистичні моделі переходів між декількома станами, включаючи процеси з єдиним або декількома приростами, і вивести співвідношення між ймовірностями переходів і інтенсивностями переходів.
1. Сформулювати припущення стосовно марківської моделі переходів між скінченною кількістю станів у неперервному часі у термінах заданої, залежної від часу, інтенсивності переходу.
 2. Визначити ${}_t p_x^{gh}$, ${}_t p_x^{gg}$, μ_x^{gh} і виразити μ_x^{gh} через ${}_t p_x^{gh}$.
 3. Вивести і розв'язати рівняння для $\frac{\partial}{\partial t} {}_t p_x^{gg}$.
 4. Вивести і розв'язати рівняння для $\frac{\partial}{\partial t} {}_t p_x^{gh}$ у простих випадках.

- (viii) Вивести оцінки максимальної правдоподібності для інтенсивності переходів у моделях з переходами між станами з кусково-сталими інтенсивностями переходів.
1. Описати план спостережень за скінченою кількістю індивідів протягом скінченого періоду часу, і визначити результуючі статистики, включаючи час чекання.
 2. Вивести функцію правдоподібності для сталої інтенсивності переходів у марковській моделі переходів між станами для заданих статистик з 1.
 3. Вивести оцінки максимальної правдоподібності для інтенсивності переходів з 2 і визначити їх асимптотичний сумісний розподіл.
 4. Описати пуассонівську апроксимацію оцінки з 3 у випадку простих приростів і вказати на переваги і недоліки цієї апроксимації.
- (ix) Описати біноміальну модель смертності, вивести оцінку максимальної правдоподібності для ймовірності смерті і порівняти біноміальну модель з моделлю з багатьма станами.
1. Описати біноміальну модель смертності групи ідентичних індивідів, які не мають інших переходів у період між двома фіксованими роками.
 2. Вивести оцінку максимальної правдоподібності для **норми смертності** у біноміальній моделі, а також її середнє і дисперсію.
 3. Описати переваги і недоліки моделі з багатьма станами і біноміальної моделі, включаючи консистентність, ефективність, простоту оцінок і їх розподілів, застосування у практичних планах спостережень і їх загальність.
- (x) Описати як точно або використовуючи наближення за даними перепису (census approximation) оцінюється інтенсивність переходів, залежна від віку.
1. Пояснити важливість поділу даних на однорідні класи, включаючи поділ за віком і статтю.
 2. Описати принцип відповідності і пояснити його фундаментальну важливість у процедурі оцінювання.
 3. Визначити дані, які необхідні для точного обчислення **центрального підлягання ризику** (central exposed to risk) (часу очікування) залежного від віку і статті.
 4. Обчислити центральне підлягання ризику для даних із п.3.
 5. Пояснити як одержати оцінки ймовірностей переходу у моделі з одиничним приростом, актуарну оцінку основану на простому пристосуванні до центрального підлягання ризику.
 6. Пояснити припущення, які робляться при наближенні часу очікування за даними перепису.
 7. Пояснити концепцію рейтингового інтервалу.
 8. Вивести формули перепису для наступних означень віку:
 - вік від дня народження
 - вік від визначеної календарної дати
 - вік від визначеної дати страхового полісуде вік може визначатись відносно наступного, останнього або найближчого дня народження, визначеної календарної дати або визначеної дати страхового полісу. Дані смертності і дані перепису можуть використовувати різні визначення віку.
 9. Визначити вік, для якого використовуються оцінки інтенсивності переходів або ймовірності переходів у випадках з п.8.
- (xi) Описати як перевірити грубі оцінки на консистентність за допомогою стандартної таблиці або множини градуйованих оцінок і описати процес градуювання.
1. Описати наступні статистичні тести грубих оцінок для порівняння із стандартною таблицею:
 - χ^2 критерій
 - критерій стандартних відхилень
 - критерій знаків

- критерій накопиченого відхилення
- критерій згрупованих знаків
- критерій серійної кореляції

Для кожного критерію описати:

- формулювання гіпотез
 - тестову статистику
 - розподіл тестової статистики з використанням, де це необхідно, наближення
 - застосування тестової статистики
2. Описати причини градування грубих оцінок для інтенсивності або ймовірності переходів і сформулювати бажані властивості множини градуйоаних оцінок.
 3. Описати критерій гладкості множини градуйоаних оцінок
 4. Описати процес градування наступними методами і назвати переваги та недоліки кожного:
 - параметрична формула
 - стандартна таблиця
 - графічний(Від слухачів не вимагається проводити градування).
 5. Описати як критерії в п.1 повинні бути покращені, щоб порівняти множини грубих і градуйоаних оцінок.
 6. Описати як тести з п.1 повинні бути покращені, щоб приймати до уваги існування дублюючих полісів.
 7. Провести порівняння множини грубих оцінок і стандартної таблиці, або множини грубих оцінок і множини градуйоаних оцінок.