

Предмет СТЗ Ймовірність та Математична Статистика

Факультет Актуаріїв та Інститут Актуаріїв

Призначення

Призначення “Ймовірності та Математичної статистики” полягає у тому, щоби забезпечити статистичне обґрунтування та статистичне моделювання, які мають застосування у актуарній практиці.

Зв'язки з іншими предметами

Предмети СТ4 “Моделі” і СТ6 “Статистичні Методи”: використовують статистичні поняття та моделі, що відображені даним предметом. Він є розвиненим у інших предметах: СТ1 “Здоров'я”, та СТ3 “Загальне Страхування”.

Цілі

Після завершення вивчення даного предмету стажер-актуарій буде здатний:

- (i) Сформулювати головні особливості набору даних (дослідницький аналіз даних).
 1. Висвітлити особливості набору даних, з використанням таблиці розподілу чи розподілу частот, та зобразити їх графічно у вигляді лінійного графіка (line plot), відрізкового графіка (box plot), прямокутничового графіка (bar chart), гістограми (histogram), графіка стебла та листя (stem and leaf plot), чи іншому елементарному вигляді.
 2. Вказати рівень/локалізацію набору даних, з використанням середнього, медіани, моди.
 3. Пояснити поширенність/варіативність набору даних, з допомогою стандартного відхилення, розмаху, міжквартильного розмаху.
 4. З'ясувати, що визначають коефіцієнти асиметрії та ексцесу для набору даних.
- (ii) Пояснити основні поняття ймовірності.
 1. Пояснити, що таке функція множин, вибірковий простір, експеримент та випадкова подія.
 2. Визначити ймовірність як функцію на класі випадкових подій, сформулювати основні аксіоми.
 3. Вивести основні властивості ймовірності, та обчислити ймовірності подій у простих випадках.
 4. Вивести правило додавання для ймовірності об'єднання двох подій, та використати це правило.
 5. Визначити умовну ймовірність однієї події за умови іншої, та обчислити такі ймовірності.
 6. Отримати теорему Байєса, та використати результат для обчислення ймовірностей.
 7. Визначити незалежність для двох подій, та обчислювати ймовірності за умов незалежності.
- (iii) Пояснити поняття випадкової величини, розподілу ймовірностей, функції розподілу, математичного сподівання, дисперсії і вищих моментів, та обчислити сподівання і ймовірності, що пов'язані з розподілами випадкових величин.
 1. Пояснити, що таке дискретна випадкова величина, її розподіл імовірностей і функція розподілу, та використати ці функції для обчислення ймовірностей.
 2. Пояснити, що таке неперервна випадкова величина, визначити її функцію розподілу і щільність розподілу, та використати ці функції для обчислення ймовірностей.

3. Визначити математичне сподівання функції від випадкової величини, середнє, дисперсію, квадратичне відхилення, коефіцієнт асиметрії і моменти випадкової величини та обчислити ці характеристики.
4. Обчислити ймовірності (аналітично чи за допомогою таблиць), що пов'язані з конкретними розподілами.
5. Знайти розподіл функції від випадкової величини через функцію розподілу цієї величини.

(iv) Визначити генератрису ймовірнісного розподілу, твірну функцію моментів, кумулятивну твірну функцію і кумулянти, обчислити їх у простих випадках та використати для знаходження моментів.

1. Визначити та обчислити генератрису дискретної цілозначної випадкової величини.
2. Визначити та обчислити твірну функцію моментів випадкової величини.
3. Визначити кумулятивну твірну функцію і кумулянти та обчислити їх для випадкової величини.
4. Використати генератрису для обчислення моментів та кумулянт випадкової величини, розкладом у ряд чи диференціюванням.
5. Визначити ті області застосування, у яких використовуються генератриси розподілів, твірні функції моментів, кумулятивні твірні функції і кумулянти, та вказати причини для цього.

(v) Визначити основні дискретні і неперервні розподіли, бути здатним їх застосовувати та моделювати їх у простих випадках.

1. Визначити та оперувати дискретними розподілами: геометричним, біноміальним, негативним біноміальним, гіпергеометричним, Пуассона та рівномірним на скінченній множині.
2. Визначити та оперувати неперервними розподілами: нормальним, логнормальним, експоненційним, гама, χ^2 -квадрат, t -розподілом, F -розподілом, бета та рівномірним розподілом на інтервалі.
3. Визначити процес Пуассона, зв'язувати зв'язок між процесом Пуассона та розподілом Пуассона, та вказати, що процес Пуассона може бути еквівалентно зхарактеризований через: (1) розподіл часів очікування між подіями, (2) розподіл приростів процесу та (3) поведінкою процесу на нескінченно малому інтервалі.
4. Згенерувати основні дискретні та неперервні випадкові величини, з використанням методів моделювання.

(vi) Визначити поняття незалежності, сумісного розподілу випадкових величин і умовних розподілів, та використати генератриси для знаходження розподілу лінійних комбінацій незалежних випадкових величин.

1. Визначити поняття сумісного розподілу випадкових величин, маргінальних розподілів та умовних розподілів.
2. Визначити дискретний розподіл та щільність розподілу для маргінального розподілу та умовного розподілу.
3. Визначити умови, за яких випадкові величини є незалежними.
4. Визначити математичне сподівання функції від двох випадкових величин через їх сумісний розподіл, коваріацію та коефіцієнт кореляції між двома величинами, та обчислити ці значення.
5. Визначити дискретний розподіл та щільність розподілу суми двох незалежних випадкових величин як згортку двох функцій.
6. Обчислити середнє та дисперсію лінійних комбінацій випадкових величин.
7. Використати генератриси для обчислення розподілу лінійних комбінацій незалежних випадкових величин.

- (vii) Сформулювати центральну граничну теорему, та застосувати її.
1. Сформулювати центральну граничну теорему для послідовності незалежних, однаково розподілених випадкових величин.
 2. Застосувати центральну граничну теорему для нормальної апроксимації інших розподілів, та обчислити відповідні ймовірності.
 3. Пояснити та застосувати корекцію на неперервність при використанні нормального наближення до дискретного розподілу.
- (viii) Пояснити поняття випадкової вибірки, статистичної оцінки і вибіркового розподілу, та визначити і застосовувати основні вибіркові розподіли.
1. Пояснити, що таке вибірка, генеральна сукупність та статистичний висновок.
 2. Визначити випадкову вибірку з розподілу випадкової величини.
 3. Пояснити, що таке статистика та її вибірковий розподіл.
 4. Визначити середнє та дисперсію вибіркового середнього, і середнє вибіркової дисперсії через середнє та дисперсію генеральної сукупності та об'єм вибірки.
 5. Визначити та використати основні вибіркові розподіли для вибіркового середнього та вибіркової дисперсії у випадку вибірки з нормального розподілу.
 6. Визначити та використати розподіл t-статистики для вибірки з нормального розподілу.
 7. Визначити та використати F-розподіл для відношення вибірових дисперсій двох незалежних виборок з нормального розподілу.
- (ix) Висвітлити основні методи оцінювання і основні властивості оцінок, та застосувати їх.
1. Визначити метод моментів для побудови оцінок параметрів генеральної сукупності, та застосувати його.
 2. Визначити метод максимальної вірогідності для побудови оцінок параметрів генеральної сукупності, та застосувати його.
 3. Визначити терміни: ефективність, зміщення, конзистентність та середньоквадратична похибка.
 4. Визначити властивість незміщеності оцінки та використати її.
 5. Визначити середньоквадратичну похибку та використати її для порівняння оцінок.
 6. Визначити асимптотичний розподіл оцінки максимальної вірогідності та використати його.
- (x) Побудувати вірогідні інтервали для невідомих параметрів.
1. Визначити у загальному вірогідний інтервал для невідомого параметра розподілу, що будується за випадковою вибіркою.
 2. Визначити вірогідний інтервал для невідомого параметра розподілу з використанням розподілу вибірки.
 3. Обчислити вірогідні інтервали для середнього та дисперсії нормального розподілу.
 4. Обчислити вірогідні інтервали для біноміальної ймовірності успіху та для Пуассонівського середнього, включно із використанням нормальної апроксимації у обох випадках.
 5. Обчислити вірогідні інтервали у двовибірковій схемі з нормальним розподілом, а також з біноміальним розподілом і розподілом Пуассона при використанні нормального наближення.
 6. Обчислити вірогідні інтервали для різниці середніх у схемі з парними даними.
- (xi) Перевірити гіпотези.
1. Пояснити, що означають такі терміни: нульова та альтернативна гіпотези, проста і складна гіпотези, похибки 1-го та 2-го роду, статистика тесту,

відношення вірогідностей, критична область, вірогідний рівень, ймовірнісне значення, та потужність тесту.

2. Застосувати основні тести у одновибіркових та двовибіркових схемах, що включають нормальний розподіл, розподіли біноміальний та Пуассона, і застосувати основні тести для парних даних.
3. Використати χ^2 -квадрат тест для перевірки гіпотези про параметри розподілу, включно з випадком, коли ці параметри невідомі.
4. Пояснити, що таке таблиця спряженості та використати тест χ^2 -квадрат для перевірки незалежності двох факторів.

(xii) Дослідити лінійну залежність між змінними з використанням дисперсійного аналізу та регресійного аналізу.

1. Зобразити графік розсіювання (scatterplots) для двовимірних даних, та прокоментувати його.
2. Визначити та обчислити коефіцієнт кореляції для двовимірних даних, пояснити його зміст та провести статистичне оцінювання.
3. Визначити, що таке пояснююча змінна та змінна відгуку.
4. Сформулювати просту модель регресії, з єдиною пояснюючою змінною.
5. Вивести та обчислити оцінки методу найменших квадратів для нахилу та зміщення у простій лінійній регресійній моделі.
6. Провести статистичний аналіз оцінки параметра нахилу у простій лінійній регресії.
7. Обчислити R-квадрат (коефіцієнт детермінації), та пояснити його використання для вимірювання якості апроксимації у лінійній моделі регресії.
8. Використати знайдене лінійне співвідношення для передбачення індивідуального відгуку з вірогідними границями.
9. Використати залишки для перевірки прийнятності і обґрунтованості лінійної моделі регресії.
10. Вивести багатовимірну лінійну модель регресії з декількома пояснюючими змінними.

(xiii) Пояснити поняття дисперсійного аналізу, та використати їх.

1. Пояснити обставини, за яких можна застосувати однофакторний дисперсійний аналіз.
2. Визначити звичайну модель для однофакторного дисперсійного аналізу та пояснити, що таке ефект фактора.
3. Провести простий однофакторний дисперсійний аналіз.

(xiv) Пояснити поняття умовного сподівання та рандомізованого розподілу, та застосувати їх.

1. Визначити умовне сподівання однієї випадкової величини, за заданого значення іншої випадкової величини, та обчислити цю характеристику.
2. Визначити, як середнє та дисперсія випадкової величини можуть бути отримані через середні значення та умовні середні значення, та застосувати це.
3. Отримати твірну функцію моментів суми випадкового числа незалежних, однаково розподілених випадкових величин (рандомізованого розподілу), та застосувати цей результат для обчислення середнього та дисперсію такого розподілу.