

Програма курсу лекцій “Фінансова математика”

Мета курсу “Фінансова математика” – познайомити слухачів з основами фінансової математики та її найпростішими застосуваннями.

Зв’язок з іншими курсами

В курсі “Фінанси і фінансовий облік” пояснюється, як користуватися активами, які описуються в даному курсі.

В курсі “Моделі” розглядаються детальніше випадкові відсоткові ставки.

В курсі “Страховання життя” розвинуто деякі технічні прийоми, запропоновані в даному курсі, для тих ситуацій, коли грошові потоки залежать від життєздатності суб’єктів.

В курсі “Економіка” розглянуто поведінку відсоткових ставок.

Курс “Фінансова економіка” є поглибленням даного курсу.

Загальна кількість годин — 74 год.

Зміст курсу

I. Використання узагальнених моделей грошових потоків для опису фінансових операцій (4 год.).

1. Визначення надходжень і витрат в кожний момент часу в майбутньому. Визначені та невизначені моменти надходжень і витрат, величини надходжень і витрат заданого грошового потоку (2 год.).
2. Фінансові операції з наступними паперами: облігацією з нульовим купоном, цінним папером з фіксованим відсотком, цінним папером з відсотком, залежним від індексу інфляції, депозитом, акцією, кредитом “під відсотки”, кредитом, що виплачується повністю та ануїтетом, – в рамках моделей грошових потоків (2 год.).

II. Зміна вартості грошей з часом та її зв’язок з нарахуванням складних відсотків і дисконтуванням. (5 год.)

1. Сума, накопичена інвестицією, за умови сталої інтенсивності відсотку, у випадках:
(2 год.)
 - простих відсотків
 - складних відсотків.
2. Сучасна вартість майбутньої виплати (1 год.).
3. Дисконтування інвестиції за умови простого (комерційного) дисконту зі сталою ставкою (1 год.).
4. Дія складного відсотку на задану суму грошей на протязі заданого періоду часу (1 год.).

III. Залежність відсотку та дисконту від часу (4 год.).

1. Співвідношення між ставками відсотку та дисконту з точки зору як арифметики, так і загальних міркувань (1 год.).
2. Співвідношення між відсотковими ставками при сплаті відсотків один раз за період та при сплаті p разів за період; інтенсивність відсотку (1 год.).
3. Різниця між номінальною та ефективною відсотковими ставками. Знаходження ефективної ставки через номінальну (1 год.).
4. Обчислення еквівалентної річної відсоткової ставки, утвореної при накопиченні суми грошей протягом заданого періоду, за умови інтенсивності відсотку, залежної від часу (1 год.).

IV. Реальні та грошові відсоткові ставки (2 год.).

V. Сучасна вартість і накопичена сума потоку рівних або нерівних між собою виплат в термінах заданої відсоткової ставки. Чиста сучасна вартість в термінах справжньої відсоткової ставки, з урахуванням сталої інфляційної ставки (4 год.).

1. Дисконтування та накопичення заданої суми грошей або ряду(можливо, нескінченного) грошових потоків на будь-який момент часу за умов, вказаних нижче (2 год.).
 - при сталій ставці відсотку або дисконту.
 - при змінній в часі ставці відсотку або дисконту, які не є неперервною функцією часу.
 - за умов, коли швидкість грошового потоку та/або інтенсивність відсотку є неперервними функціями часу.
2. Сучасна вартість та акумульоване значення серії рівних або нерівних між собою виплат, зроблених з рівними проміжками у часі із заданою ставкою відсотку у наступних випадках (2 год.).
 - виплата іде із затримкою на один період.
 - виплата іде без затримки.

VI. Означення та використання найбільш важливих функціоналів зі складними відсотками. Ануїтети (6 год.).

1. Формули для $a_{\overline{n}|}, s_{\overline{n}|}, a_{\overline{n}|}^{(p)}, s_{\overline{n}|}^{(p)}, \ddot{a}_{\overline{n}|}, \ddot{s}_{\overline{n}|}, \ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)}, \ddot{s}_{\overline{n}|}^{(p)}, \bar{a}_{\overline{n}|}, \bar{s}_{\overline{n}|}$ в термінах $i, v, n, d, \delta, i^{(p)}$ та $d^{(p)}$ (2 год.).
2. Формули для ${}_m|a_{\overline{n}|}, {}_m|a_{\overline{n}|}^{(p)}, {}_m|\ddot{a}_{\overline{n}|}, {}_m|\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)}$ та ${}_m|\bar{a}_{\overline{n}|}$ в термінах $i, v, n, d, \delta, i^{(p)}$ та $d^{(p)}$ (2 год.).
3. Формули для $(Ia)_{\overline{n}|}, (I\ddot{a})_{\overline{n}|}, (I\bar{a})_{\overline{n}|}, (\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|}$ та відповідних ануїтетів із затримкою в термінах $i, v, n, \delta, a_{\overline{n}|}$ та $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ (2 год.).

VII. Рівняння вартостей.(5 год.)

1. Рівняння вартостей у випадку визначених виплат та надходжень (1 год.).
2. Застосування рівняння вартостей до невизначених виплат та надходжень (2 год.).
3. Дві умови існування роз'язку рівняння вартостей (2 год.).

VIII. Розклад боргу на регулярні виплати за відсотком і за капіталом (4 год.).

1. Змінні ставки та річні ефективні ставки (2 год.).
2. Обчислення величин виплат боргу і розклад їх на капітальну і відсоткову компоненти у наступних випадках: ануїтет використовується для виплат боргу, і виплати робляться раз у період або p разів на період. Борг за капіталом в кожний момент часу (2 год.).

IX. Застосування методів дисконтування грошових потоків для оцінювання інвестиційних проектів (10 год.).

1. Обчислення чистої сучасної вартості та акумульованого прибутку за надходженнями та виплатами, що відповідають інвестиційному проекту. Відсоткові ставки задано (2 год.).
2. Обчислення внутрішньої ставки доходу, утвореної виплатами та надходженнями від інвестиційного проекту (2 год.).
3. Період повернення та дисконтований період повернення та їхнє застосування до оцінки вигідності інвестиційного проекту (2 год.).
4. Обчислення періоду повернення та дисконтованого періоду повернення, що відповідають надходженням та виплатам за інвестиційним проектом (2 год.).

5. Обчислення ставок доходу, зважених грошима та зважених часом та відповідної внутрішньої ставки доходу інвестиції або фонду (2 год.).

X. Інвестиційні та ризикові характеристики наступних типів активів, що їх використовують з метою інвестування: (4 год.)

- Урядові облігації з фіксованим відсотком (1 год.).
- Облігації інших установ з фіксованим відсотком (1 год.).
- Акції та інші фінанси акціонерного типу (1 год.).
- Деривативи (1 год.).

XI. Аналіз елементарних задач на складні відсотки (11 год.).

1. Сучасна вартість виплат за цінним папером з фіксованим відсотком, причому купонна ставка є сталою, а цінний папір викупавється за допомогою однієї виплати (1 год.).
2. Обчислення верхньої та нижньої границь сучасної вартості цінного паперу з фіксованим відсотком, причому цінний папір викупавється за допомогою однієї виплати, в момент, обраний на розсуд позичальника (2 год.).
3. Обчислення поточного доходу і доходу при викупівлі цінного паперу з фіксованим відсотком (як у пункті 1.) із заданою ціною (1 год.).
4. Обчислення сучасної вартості або доходу від звичайної акції та власності, при заданих простих (але не обов'язково сталих) припущеннях відносно зростання дивідендів і ренти (2 год.).
5. Розв'язання рівняння значень для реальної відсоткової ставки у присутності інфляційного коефіцієнта (1 год.).
6. Обчислення сучасної вартості або реального доходу від індексованої облігації у присутності інфляції (1 год.).
7. Обчислення вартості або доходу від цінного паперу з фіксованим відсотком у випадку, коли інвестор сплачує прибутковий податок на купонні виплати, а остання виплата підлягає капітальному податку (1 год.).
8. Обчислення величини інвестиції, за умови сплати капітального податку, в простих ситуаціях, коли ставки податку фіксовано, і приймається до уваги можливість індексації із змінним індексом, а також інвестор може компенсувати втрати капіталу за допомогою капітальних прибутків (2 год.).

XII. Обчислення ціни продажу та вартості форвардного контракту в умовах відсутності арбітражу (4 год.).

1. Визначення поняття “арбітражу” і пояснення щодо того, чого на більшості ринків арбітраж неможливий (1 год.).
2. Обчислення ціни форвардного контракту в умовах відсутності арбітражу і за наступних припущень: (1 год.)
 - На протязі дії контракту немає ні прибутків, ні збитків від активу, на який заключено контракт.
 - Є сталий прибуток від активу на протязі дії контракту.
 - Є фіксований дохід за дивідендами.
3. “Хеджування” форвардного контракту (1 год.).
4. Обчислення вартості форвардного контракту у будь-який момент на протязі його дії за відсутності арбітражу, у термінах пункту 2 (1 год.).

XIII. Часова структура відсоткових ставок (6 год.).

1. Основні фактори, що впливають на часову структуру відсоткових ставок (1 год.).
2. Паритетний дохід і дохід при виконанні (1 год.).

3. Співвідношення між наступними величинами та їх обчислення: (1 год.)
 - Дискретні спотові і форвардні ставки.
 - Неперервні спотові і форвардні ставки.
4. Визначення тривалості і опуклості послідовності грошових потоків, та застосування цих понять для оцінки чутливості послідовності грошових потоків до зміни відсоткової ставки (1 год.).
5. Обчислення тривалості та опуклості послідовності грошових потоків (1 год.).
6. Застосування тривалості та опуклості до теорії імунізації (за Редінгтоном) портфеля заборгованостей (1 год.).

XIV. Прості стохастичні моделі доходів від інвестицій (5 год.).

1. Концепція стохастичної відсоткової ставки і основна відмінність між нею і детермінованою моделлю (1 год.).
2. Алгебраїчні вирази для середнього та дисперсії акумульованого значення одного внеску для моделі, в якій щорічні ставки доходу незалежні і однаково розподілені, та для інших простих моделей (1 год.).
3. Рекурентні співвідношення для обчислення середнього та дисперсії акумульованого значення річного внеску у випадку, коли річні ставки доходу незалежні і однаково розподілені (1 год.).
4. Обчислення функції розподілу накопиченого значення одного внеску у моделі, де кожен рік випадкова величина $1+i$ незалежна від інших і має логнормальний розподіл. Сучасна вартість суми, накопиченої за даний період (1 год.).
5. Застосування попередніх результатів для обчислення імовірності того, що проста послідовність виплат накопичить задану величину у заданий момент часу у майбутньому (1 год.).